

**Aufgabe 1**1. Definition der Variablen:

- $x_i$ : Absatzmenge in Mio. Barrel an Land  $i$   
 $x_1$ : Absatzmenge an schwarzafrikanische Entwicklungsländer  
 $x_2$ : Absatzmenge an EG  
 $x_3$ : Absatzmenge an USA  
 $x_4$ : Absatzmenge an Südafrika  
 $x_5$ : Absatzmenge an Restländer

2. Zielfunktion:

Berechnung der Durchschnittspreise für USA und EG

a) EG:  $0,25 \cdot 26 + 0,75 \cdot 22 = 23$

b) USA:  $0,4 \cdot 25 + 0,6 \cdot 23 = 23,8$

Zielfunktion:  $15x_1 + 23x_2 + 23,8x_3 + 30x_4 + 22x_5 \rightarrow \max!$

3. Restriktionen:

RI:  $x_1 = 20$

RII:  $x_2 \leq 200$

RIII:  $x_3 \leq 200$

RIV:  $x_2 + x_3 \leq 300$

RV:  $x_4 \leq \frac{1}{4} x_3$

RVI:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 366$  (Mio. Barrel pro Jahr)

NNB:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$  oder  $x_i \geq 0 \wedge i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**Aufgabe 2**1. Definition der Variablen:

- $x_i$ : Anlagebetrag in Anlage  $i$   
 $x_1$ : Anlagebetrag in Anlage A  
 $x_2$ : Anlagebetrag in Anlage B  
 $x_3$ : Anlagebetrag in Anlage C  
 $x_4$ : Anlagebetrag in Anlage D

2. Zielfunktion:

Ertrag =  $0,06x_1 + 0,07x_2 + 0,08x_3 + 0,055x_4 \rightarrow \max!$

3. Restriktionen:

RI:  $x_1 + x_2 \geq 500.000$

RII:  $x_3 + x_4 \leq 300.000$

RIII:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.000.000$

NNB:  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

**Aufgabe 3**1) Berechnung der Deckungsbeiträge der Rum-Verschnitte:

DB = Erlös - variable Kosten

- Rumanteil je Marke berechnen:

$$\text{Golden Label (G. L.): } 0,56 : 0,8 = 0,7$$

$$\text{Silver Label (S. L.): } 0,4 : 0,8 = 0,5$$

$$\text{Caribic (C.): } 0,32 : 0,8 = 0,4$$

- Wasseranteil: (Rest zu 1l)

$$\text{G. L.: } 0,3$$

$$\text{S. L.: } 0,5$$

$$\text{C.: } 0,6$$

- Kosten pro l Rumverschnitt: 1 Liter Rum kostet 5 DM

1 Liter Wasser kostet 0,30 DM

$$\text{G. L.: } 0,7 \cdot 5DM + 0,3 \cdot 0,3DM = 3,59DM$$

$$\text{S.L.: } 0,5 \cdot 5DM + 0,5 \cdot 0,3DM = 2,65DM$$

$$\text{C.: } 0,4 \cdot 5DM + 0,6 \cdot 0,3DM = 2,18DM$$

DB = Erlös - variable Kosten:

$$\text{G. L.: } 9,50 - 3,59 = 5,91 \text{ DM}$$

$$\text{S. L.: } 7,00 - 2,65 = 4,35 \text{ DM}$$

$$\text{C.: } 5,50 - 2,18 = 3,32 \text{ DM} \quad \underline{\text{Lineares Optimierungsmodell:}}$$

1. Definition der Variablen: $x_i$ : hergestellte Menge des Rum-Verschnitts i in l $x_1$ : hergestellte Menge von Golden Label $x_2$ : hergestellte Menge von Silver Label $x_3$ : hergestellte Menge von Caribic2. Zielfunktion: Maximierung des Gesamtdeckungsbeitrags:

$$Z = 5,91 x_1 + 4,35 x_2 + 3,32 x_3 \quad \rightarrow \text{ max!}$$

3. Restriktionen:

$$\text{RI: } 0,3 x_1 + 0,5 x_2 + 0,6 x_3 \leq 500.000$$

$$\text{RII: } 0,7 x_1 + 0,5 x_2 + 0,4 x_3 \leq 400.000$$

$$\text{RIII: } x_2 \leq 450.000$$

$$\text{NNB: } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Aufgabe 4**

Problemtyp: Zuweisungsproblem

1. Definition der Variablen:

$x_{ij}$ : Fertigung von Produkt  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auf Anlage  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )

$x_{ij}$  sind Binärvariablen:  $x_{ij} = \{0; 1\}$

2. Zielfunktion:

$$Z = 10x_{11} + 8x_{12} + 12x_{13} + 18x_{21} + 6x_{22} + 14x_{23} + 6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} \rightarrow \min!$$

3. Restriktionen:

- pro Fertigungsstätte 1 Produkt, d.h.  $\sum_i x_{ij} = 1$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

- pro Produkt 1 Fertigungsstätte, d.h.  $\sum_j x_{ij} = 1$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

**Aufgabe 5**

Problemtyp: Investitionsproblem

1. Definition der Variablen: $A_1$ : Realinvestition 1 $A_2$ : Realinvestition 2 $A_3$ : Realinvestition 3 $F_1$ : Finanzinvestition in  $t = 1$  $F_2$ : Finanzinvestition in  $t = 2$  $K_1$ : Kreditaufnahme in  $t = 1$  $K_2$ : Kreditaufnahme in  $t = 2$  $E$ : Endwert2. Zielfunktion:  $Z = E = \text{Vermögensendbestand in } t = 3 \rightarrow \max!$ 3. Restriktionen:

Die Realinvestitionen können genau einmal oder gar nicht getätigt werden:

$$A_i = \{0; 1\} \text{ für } i = 1, 2, 3$$

Liquiditätsrestriktionen:

$$\text{für } t = 1: \quad -40 A_1 - 50 A_2 - 30 A_3 + K_1 - F_1 + 50 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{für } t = 2: \quad 4 A_1 + 30 A_2 + 20 A_3 - 1,2 K_1 + 1,1 F_1 + K_2 - F_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{für } t = 3: \quad 44 A_1 + 30 A_2 + 18 A_3 - 1,2 K_2 + 1,1 F_2 \stackrel{!}{=} E$$

Höchstrestriktionen:

$$K_1 \leq 120$$

$$K_2 \leq 70$$

- Nichtnegativitätsbedingungen:

$$K_1, K_2 \geq 0$$

$$F_1, F_2 \geq 0$$

**Aufgabe 6**

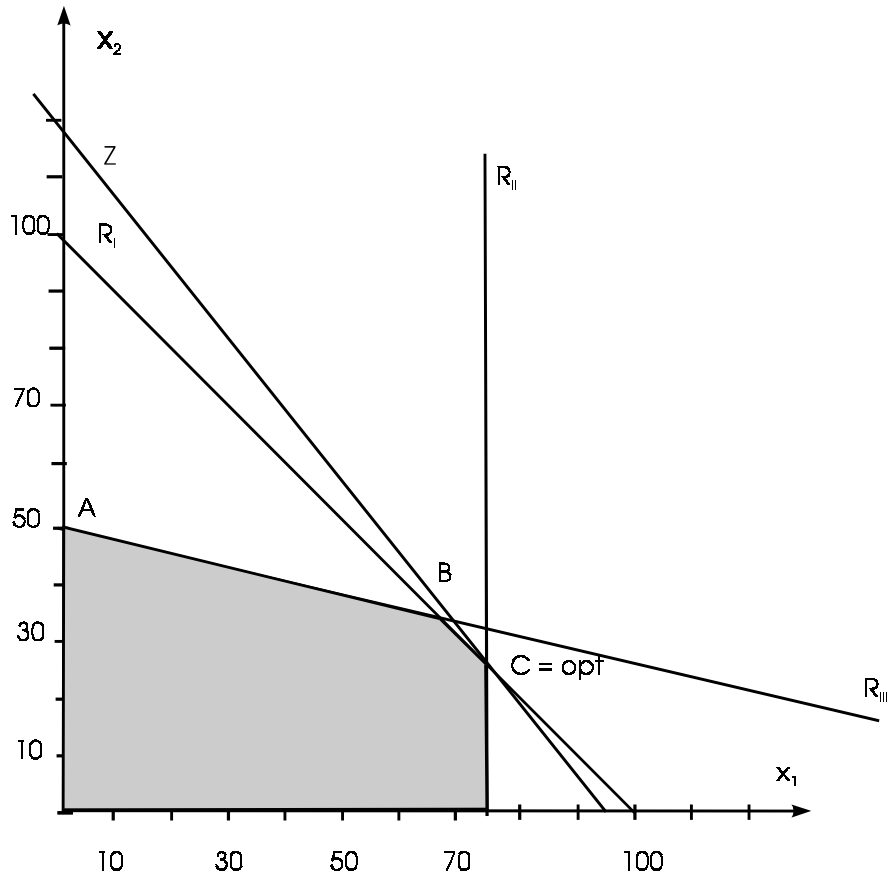
## 1) Optimallösung des Optimierungsproblems graphisch:

$$\text{Eintragen der Restriktionen: RI: } 100 \geq x_1 + x_2$$

$$\text{RII: } 150 \geq 2x_1$$

$$\text{RIII: } 200 \geq x_1 + 4x_2$$

$$\text{NNB: } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Das Optimum liegt bei  $x_1 = 75$  und  $x_2 = 25$ .

$$2) \quad Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{Z}{20} - \frac{p_1}{20} x_1$$

Steigung von RIII:  $m = -\frac{1}{4} \rightarrow p_1 = 5 \rightarrow$  Strecke  $\overline{AB}$  ist optimal.

Steigung von RI:  $m = -1 \rightarrow p_1 = 20 \rightarrow$  Strecke  $\overline{BC}$  ist optimal.

dazwischenliegende Steigungsbereiche:

$$0 \geq m > -\frac{1}{4} \rightarrow 0 \geq -\frac{p_1}{20} > -\frac{1}{4}$$

$0 \leq p_1 < 5 \rightarrow$  Punkt A (0 / 50) ist optimal.

$-\frac{1}{4} > m > -1 \rightarrow 5 < p_1 < 20 \rightarrow$  Punkt B  $(66\frac{2}{3} / 33\frac{1}{3})$  ist optimal.

$-1 > m > -\infty \rightarrow p_1 > 20 \rightarrow$  Punkt C (75 / 25) ist optimal.

**Aufgabe 7**

Ausgangstableau:

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$
Z	0	-5	-7,5	-2,5
$s_1$	180	4	2	3
$s_2$	90	1	2	2
$s_3$	50	1	1	1

1. Zwischentableau:

1. ZT		$x_1$	$s_2$	$x_3$
Z	337,5	-1,25	3,75	5
s	90	3	-1	1
$x_2$	45	1/2	1/2	1
s	5	1/2	-1/2	0

Endtableau:

ET		$s_3$	$s_2$	$x_3$
Z	350	2,5	2,5	5
$s_1$	60	-6	2	1
$x_2$	40	-1	1	1
$x_1$	10	2	-1	0

**Aufgabe 8**

- Definition der Variablen:  $x_i$ : hergestellte Menge des Produktes i
- Zielfunktion:  $DB = 2 x_1 + 4 x_2 + 3 x_3$
- Restriktionen:

M1:  $1 x_1 + 8 x_2 + 2 x_3 \leq 16$   
 M2:  $4 x_2 + 6 x_3 \leq 20$   
 R1:  $4 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 \leq 10$   
 R3:  $2 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 \leq 20$   
 NNB:  $x_{1,2,3} \geq 0$
- Restriktionen als Gleichungen:

$$16 = 1 x_1 + 8 x_2 + 2 x_3 + s_1$$

$$20 = 4 x_2 + 6 x_3 + s_2$$

$$10 = 4 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 + s_3$$

$$20 = 2 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 + s_4$$

$$-s_1 + 16 = 1 x_1 + 8 x_2 + 2 x_3$$

$$-s_2 + 20 = 4 x_2 + 6 x_3$$

$$-s_3 + 10 = 4 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3$$

$$-s_4 + 20 = 2 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3$$

$$-DB + 0 = -2 x_1 - 4 x_2 - 3 x_3$$

5. Tableauschreibweise:

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$
Z	0	-2	-4	-3
$M_1$	16	1	8	2
$M_2$	20	0	4	6
$R_1$	10	4	4	2
$R_2$	20	2	4	2

1. ZT			

2. ZT			

ET			

Optimales Produktionsprogramm:

Produkte:  $x_1 = 0$        $x_2 = 1,25$        $x_3 = 2,5$

Restkapazitäten:  $M_1 = 1$        $M_2 = 0$   
 $R_1 = 0$        $R_2 = 10$

$DB_{opt} = 12,5$

**Aufgabe 9**

- 1) Graphische Lösung des Optimierungsproblems:  
 ...  
 2) Exakte Berechnung der Werte aller Entscheidungs- und Schlupfvariablen:

Optimallösungsbereich ist die Strecke auf RIII des Lösungspolyeders!

Wertebereich der Entscheidungsvariablen  $x_1$  und  $x_2$ :

1. Eckpunkt: (RI)  $\cap$  (RIII):  $6 - \frac{1}{5}x_1 = 15 - 2x_1$

$x_1 = 5; \quad x_2 = 5$

2. Eckpunkt: (RVI)  $\cap$  (RIII):  $\frac{11}{3} - \frac{1}{3}x_1 = 15 - 2x_1$

$x_1 = 6,8; \quad x_2 = 1,4$

Optimallösungsbereich:  $x_2 = 15 - 2x_1$  (RIII) für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$

Werte der Schlupfvariablen:

- (1)  $x_1 + 5x_2 + s_1 = 30$   
 $s_1 = 30 - x_1 - 5x_2$  ( $x_2 = 15 - 2x_1$  einsetzen)  
 $s_1 = 30 - x_1 - 75 - 10x_1$   
 $\rightarrow s_1 = 9x_1 - 45$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$
- (2)  $x_1 + x_2 + s_2 = 12$   
 $s_2 = 12 - x_1 - x_2$  ( $x_2 = 15 - 2x_1$  einsetzen)  
 $s_2 = 12 - x_1 - 15 + 2x_1 \rightarrow s_2 = x_1 - 3$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$
- (3)  $2x_1 + x_2 + s_3 = 15$   
 $s_3 = 15 - 2x_1 - (15 - 2x_1) \rightarrow s_3 = 0$
- (4)  $-3x_1 + 2x_2 + s_4 = 6$   
 $s_4 = 6 + 3x_1 - 2(15 - 2x_1) \rightarrow s_4 = 7x_1 - 24$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$
- (5)  $3x_1 + x_2 - s_5 = 9$   
 $s_5 = 3x_1 + 15 - 2x_1 - 9 \rightarrow s_5 = x_1 + 6$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$
- (6)  $x_1 + 3x_2 - s_6 = 11$   
 $s_6 = x_1 + 3 \cdot (15 - 2x_1) - 11 \rightarrow s_6 = -5x_1 - 34$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$
- (7)  $x_1 + s_7 = 9 \rightarrow s_7 = 9 - x_1$  für  $5 \leq x_1 \leq 6,8$

**Aufgabe 10**1. Schritt: Zielfunktion mit (-1) multiplizieren

$$-Z + 0 = -2x_1 - 4x_2 - 6x_3$$

2. Schritt: Einführung der Schlupfvariablen

$$R_1: 20 = 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 - s_1 \quad (\text{weil } \leq \quad \text{wobei } s_1 \geq 0)$$

$$R_2: 15 = 4x_1 - x_2 + 3x_3 - s_2 \quad (\text{weil } = \quad \text{wobei } s_2 = 0)$$

$$R_3: 10 = -2/3x_1 + 5/3x_2 + x_3 + s_3 \quad (\text{weil } \geq \quad \text{wobei } s_3 \geq 0)$$

$$R_1: -s_1 - 20 = -2x_1 - 2x_2 - 9x_3$$

$$R_2: -s_2 - 15 = -4x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$R_3: -s_3 + 10 = -2/3x_1 + 5/3x_2 + x_3$$

3. Schritt: Bildung des Ausgangstableaus

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$
Z	0	-2	-4	-6
$R_1^{(-)}$	-20	-2	-2	-9
$R_2^*$	-15	-4	1	-3
$R_3$	10	-2/3	5/3	1

Beachte:  $R_1$  ist als Mindestrestriktion gekennzeichnet $R_2$  ist als Gleichung gekennzeichnet $R_3$  bleibt als Höchstrestriktion ohne Kennzeichnung4. Schritt: Prüfung des Tableaus auf Zulässigkeit

Negative Werte in der Kapazitätsspalte: unzulässig!

→ keine zulässige Ausgangslösung → Schritt 5

→ zulässige Ausgangslösung → Schritt 6

5. Schritt: Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

5.1) Beseitigung der Gleichungen aus der Basis

(Beachte: Gleichungen dürfen nicht zurückgetauscht werden!)

a) Wahl der Pivotzeile:

Pivotzeile = Gleichungszeile

(mehrere Gleichungen: größter negativer Wert in der Basis)

b) Wahl der Pivotspalte:

Pivotspalte: negativer Koeffizient in der Pivotzeile

(mehrere negative Koeffizienten: dem Betrage nach am kleinsten Quotient: Pivotzeile/Zielfunktionszeile)

Pivotelement: - 4 →  $|-4/-2| = 2$

Pivotelement: - 3 →  $|-3/-6| = 0,5$  → am kleinsten!

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$
Z	0	-2	-4	-6
$R_1^{(-)}$	-20	-2	-2	-9
$R_2^*$	-15	-4	1	-3
$R_3$	10	-2/3	5/3	1

c) Berechnung des 1. Zwischentableaus:

1. ZT		$x_1$	$x_2$	$R_2^*$
Z	30	6	-6	-2
$R_1^{(-)}$	25	10	-5	-3
$x_3$	5	4/3	-1/3	-1/3
$R_3$	5	-2	2	1/3

→ zulässige Ausgangslösung: → weiter mit Schritt 6

→ unzulässige Ausgangslösung:

5.2) Beseitigung der Mindestrestriktionen aus der Basis

5.3) Beseitigung der Höchstrestriktionen aus der Basis

6. Schritt: Optimallösung mit einfachen Simplex

ET		$x_1$	$R_3$	$R_2^*$
Z	45	0	3	-1
$R_1^{(-)}$	75/2	5	5/2	-13/6
$x_3$	35/6	1	1/6	-5/18
$x_2$	5/2	-1	1/2	1/6

**Aufgabe 11**

- 1.1) Negativer Grenzwert von  $P_1$  in der Zielfunktionszeile  
Produktion von  $P_1$  würde den Zielfunktionswert weiter erhöhen
- 1.2) Wähle diejenige Nicht-Basis-Variable, die den größten negativen Grenzwert besitzt und somit die größte Zielbeitragserhöhung bringt. Man entscheidet sich daher für  $P_1$ .
- 1.3) Wähle diejenige Basis-Variable mit dem kleinsten Quotienten aus Kapazitätsspaltenwert und positivem Wert in der Pivot-Spalte.  
Produkt  $P_1$  wird so oft produziert, bis ein Engpaß entsteht.

$$\min \left( \frac{10}{8}, \frac{10}{2}, \frac{60}{1} \right) \quad M_1 \text{ beschränkt die Produktion von } P_1!$$

2) Endtableau:

ET		$M_1$	$M_2$	$P_3$	$P_4$
$P_1$					
$P_2$					
$M_3$					
$M_4$					

Optimale Lösung:

$DB_{\max} = 162,5$

Produktionsprogramm:  $P_1 = 6,25; P_2 = 7,5; P_3 = 0; P_4 = 0$

Restkapazitäten:  $M_1 = 0; M_2 = 0; M_3 = 32,5; M_4 = 53,75$

3)

ET		M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
	162,5	1,25	2,75	15,5	30,25
P <sub>1</sub>	6,25	5/8			
P <sub>2</sub>	7,5	- 1/4			
M <sub>3</sub>	32,5	1/4			
M <sub>4</sub>	53,75	- 5/8			

$$\begin{aligned} \Delta M_1 = -4 &\quad \rightarrow \quad \Delta DB = -4 \cdot 1,25 = -5 && DB_{\text{neu}} = 157,5 \\ & && \Delta P_1 = -4 \cdot 5/8 = -2,5 && P_{1\text{neu}} = 3,75 \\ & && \Delta P_2 = -4 \cdot (-0,25) = 1 && P_{2\text{neu}} = 8,5 \\ & && \Delta M_3 = -4 \cdot 0,25 = -1 && M_{3\text{neu}} = 31,5 \\ & && \Delta M_4 = -4 \cdot (-5/8) = 2,5 && M_{4\text{neu}} = 56,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \text{entweder:} & \quad P_1 = 6 & \rightarrow & \quad DB_{\text{gesamt}} = 8 \cdot 6 + 7,5 \cdot 15 = 160,5 \\ \text{oder:} & \quad \Delta P_1 = -0,25 & & \quad \Delta DB = -0,25 \cdot 8 = -2 \\ & & & \quad DB_{\text{gesamt}} = 162,5 - 2 = 160,5 \end{aligned}$$

**Aufgabe 12**

1) Graphische Lösung

...

2) Lösung mittels Simplex-Algorithmus

1. Schritt: Zielfunktion mit (-1) multiplizieren

$$-Z + 0 = -x_1 - 2x_2$$

2. Schritt: Einführung der Schlupfvariablen

$$-s_1 + 9 = x_1 + x_2$$

$$-s_2 - 17/3 = -5/3x_1 + x_2$$

$$-s_3 - 7 = -3/2x_1 - x_2$$

3. Schritt: Bildung des Ausgangstableaus

AT		$x_1$	$x_2$
Z	0	-1	-2
$R_1$	9	1	1
$R_2^*$	-17/3	-5/3	1
$R_3^{(-)}$	-7	-3/2	-1

4. Schritt: Prüfung des Tableaus auf Zulässigkeit

Negative Werte in der Basis (-17/3; -7): → unzulässig

5. Schritt: Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

## 5.1) Beseitigung der Gleichungen aus der Basis

1. ZT		$R_2^*$	$x_2$
Z	17/5	-3/5	-13/5
$R_1$	28/5	3/5	8/5
$x_1$	17/5	-3/5	-3/5
$R_3^{(-)}$	-19/10	-9/10	-19/10

## 5.2) Beseitigung der Mindestrestriktionen aus der Basis

2. ZT		$R_2^*$	$R_3^{(-)}$
Z	6	12/19	-26/19
$R_1$	4	-3/19	16/19
$x_1$	4	-6/19	-6/19
$x_2$	1	9/19	-10/19

6. Schritt: Optimallösung mit einfachen Simplex

ET		$R_2^*$	$R_1$
Z	25/2	3/8	13/8
$R_3^{(-)}$	19/4	-3/16	19/16
$x_1$	11/2	-3/8	3/8
$x_2$	7/2	3/8	5/8

**Aufgabe 13**

1)

1. ZT		P <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>
Z	1875	2,5	12,5	- 20
F <sub>1</sub>	25	0,5	- 0,5	1
P <sub>2</sub>	75	0,5	0,5	0
F <sub>3</sub>	125	4,5	- 0,5	4

Es handelt sich nicht um die Optimallösung, da in der Zielfunktionszeile noch negative Grenzwerte enthalten sind. Durch Produktion von P<sub>3</sub> kann der Zielfunktionswert noch gesteigert werden.

2)

ET		P <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>
Z	2375	25/2	5/2	20
P <sub>3</sub>	25	1/2	-1/2	1
P <sub>2</sub>	75	1/2	1/2	0
F <sub>3</sub>	25	5/2	3/2	-4

2.1) Optimale Lösung:

$$Z = 2375$$

$$\text{Produktionsprogramm: } P_1 = 0 \quad P_2 = 75 \quad P_3 = 25$$

$$\text{Restkapazitäten: } F_1 = 0 \quad F_2 = 0 \quad F_3 = 25$$

2.2)  $\Delta P_1 = + 5 \quad \rightarrow \quad \Delta Z = 5 \cdot (- 1) \cdot 12,5 = - 62,5$

$$\Delta P_3 = 5 \cdot (- 1) \cdot 0,5 = - 2,5$$

$$\Delta P_2 = 5 \cdot (- 1) \cdot 0,5 = - 2,5$$

$$\Delta F_3 = 5 \cdot (- 1) \cdot 2,5 = - 12,5$$

2.3) Grenzwert von P<sub>1</sub>:  $25/2 \cdot (- 1)$ 

$$\Delta P_1 = + 1: \quad \Delta P_3 = 0,5 \cdot (- 1)$$

$$\Delta P_2 = 0,5 \cdot (- 1)$$

$$\Delta F_3 = 5/2 \cdot (- 1) \quad \rightarrow \quad \text{hier keine Zielfunktionsbeitragsänderung}$$

$$\Delta Z = - 25/2 = 1 \cdot 10 (\text{Preis } P_1) - 0,5 \cdot 25 (\text{Preis } P_2) - 0,5 \cdot 20 (\text{Preis } P_3)$$

Der Grenzwert von P<sub>1</sub> besagt, wie sich die Erhöhung der Produktion von P<sub>1</sub> um 1 Einheit auf die Zielfunktion auswirkt. Im Beispiel sinkt der Zielfunktionswert um 12,5 Einheiten.

Grenzwert von  $F_2$ :  $5/2$

$$\Delta F_2 = + 1: \quad \Delta P_3 = - 0,5$$

$$\Delta P_2 = 0,5$$

$$\Delta F_3 = 3/2 \quad \rightarrow \quad \text{hier keine Zielfunktionsbeitragsänderung}$$

$$\Delta Z = 5/2 = 0,5 \cdot 25 \text{ (Preis } P_2) - 0,5 \cdot 20 \text{ (Preis } P_3)$$

Der Grenzwert von  $F_2$  besagt, wie sich die Erhöhung der Faktorkapazität von  $F_2$  um eine Einheit auf die Zielfunktion auswirkt.

Im Beispiel steigt der Zielfunktionswert um 2,5 Einheiten an.

2.4) Ausgangsposition: Restkapazität von  $F_3 = 25$

$$\Delta F_3 = - 20 \quad \rightarrow \quad \text{Restkapazität von 5 Einheiten}$$

$$\Delta F_3 = + 20 \quad \rightarrow \quad \text{Restkapazität von 45 Einheiten}$$

Somit bleibt die Optimallösung in beiden Fällen bestehen.

$$\begin{array}{llll} 2.5) \quad \Delta F_1 = + 5: & \Delta Z & = 5 \cdot 20 & = 100 \\ & \Delta P_3 & = 5 \cdot 1 & = 5 \\ & \Delta P_2 & = 5 \cdot 0 & = 0 \\ & \Delta F_3 & = 5 \cdot (-4) & = - 20 \end{array}$$

Überprüfung des Stabilitätsbereichs nach oben:

$$e^+ = \min\left(\frac{25}{|-4|}\right) = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \text{kein neuer Austauschschritt notwendig}$$

$$\Delta F_1 = - 5: \quad \rightarrow \quad \Delta Z = - 100$$

$$\Delta P_3 = - 5$$

$$\Delta P_2 = 0$$

$$\Delta F_3 = 20$$

Überprüfung des Stabilitätsbereichs nach unten:

$$e^- = \min\left(\frac{25}{1}\right) = 25 \quad \Rightarrow \quad \text{kein neuer Austauschschritt notwendig}$$

#### Aufgabe 14

$$1) \quad \underline{\text{Grenzwert } P_2}: \quad \frac{\Delta Z}{\Delta P_2} = \frac{65}{12} \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad \Delta Z = - 65/12 \cdot \Delta P_2$$

$$\Delta P_2 = + 3: \quad \rightarrow \quad \Delta Z = - 65/12 \cdot 3 = - 195/12$$

$$Z_{\text{neu}} = 2075/6 + (-195/12) = 329,583$$

2) Grenzwert  $F_1$ : 5/12

$$\begin{array}{rclcl} \Delta F_1 = +1: & \rightarrow & \Delta P_3 & = -1/6 \Rightarrow & P_{3\text{neu}} = 41,5 \\ & & \Delta F_2 & = -1/6 \Rightarrow & F_{2\text{neu}} = 1,5 \\ & & \Delta P_1 & = 1/3 \Rightarrow & P_{1\text{neu}} = 7 \\ & & \Delta Z & = 5/12 \Rightarrow & \underline{Z_{\text{neu}} = 346,25} \end{array}$$

Maximale Erhöhung des Faktors 1:

→ Stabilitätsbereichs nach oben:

Erhöhung von  $F_1$ : Produktion von  $P_3$  sowie Restkapazität von  $F_2$  sinken!

$$\Delta F_{1\text{max}} = \min \{ (125/3: |-1/6|); (5/3: |-1/6|) \} = 10$$

Die Kapazität von  $F_1$  kann maximal um 10 Einheiten erhöht werden, ohne daß sich die gefundene Optimallösung ändert (sonst  $F_2 = 0$ )

3) Nein, eine Erhöhung von  $F_3$  um 6 Einheiten würde den Zielfunktionswert um gerade  $6 \cdot 10/3 = 20$  Geldeinheitsheiten erhöhen.

Zusätzlich würde noch der Stabilitätsbereich unterschritten ( $F_2$ ) und somit eine Neuberechnung des Simplex notwendig.

**Aufgabe 15**

1)

1. Schritt: Zielfunktion mit (-1) multiplizieren

$$-Z + 0 = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4$$

2. Schritt: Einführung der Schlupfvariablen

$$R1: 10 = x_1 + x_2 + \quad x_4 + s_1 \quad (\text{weil } \geq \quad \text{wobei } s_1 \geq 0)$$

$$R2: 4 = \quad 4x_3 - 2x_4 \quad - s_2 \quad (\text{weil } = \quad \text{wobei } s_2 = 0)$$

$$R3: 12 = x_1 - x_2 + 2x_3 \quad - s_1 \quad (\text{weil } \leq \quad \text{wobei } s_3 \geq 0)$$

$$R1: -s_1 + 10 = x_1 + x_2 + \quad x_4$$

$$R2: -s_2 - 4 = \quad -4x_3 + 2x_4$$

$$R3: -s_3 - 12 = -x_1 + x_2 - 2x_3$$

3. Schritt: Bildung des Ausgangstableaus

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Z	0	-2	-3	-4	-1
$R_1$	10	1	1	0	1
$R_2^*$	-4	0	0	-4	2
$R_3^{(-)}$	-12	-1	1	-2	0

4. Schritt: Prüfung des Tableaus auf Zulässigkeit

Negative Werte in der Basis (-4; -12) → unzulässig

5. Schritt: Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

## 5.1) Beseitigung der Gleichungen aus der Basis

- Wahl der Pivotzeile:
- Wahl der Pivotspalte:

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Z	0	-2	-3	-4	-1
$R_1$	10	1	1	0	1
$R_2^*$	-4	0	0	-4	2
$R_3^{(-)}$	-12	-1	1	-2	0

## c) Berechnung des 1. Zwischentableaus:

1. ZT		$x_1$	$x_2$	$R_2^*$	$x_4$
Z	4	-2	-3	-1	-3
$R_1$	10	1	1	0	1
$x_3$	1	0	0	-1/4	-1/2
$R_3^{(-)}$	-10	-1	1	-1/2	-1

→ unzulässige Ausgangslösung

5.2) Beseitigung der Mindestrestriktionen aus der Basis

2. ZT		$x_1$	$x_2$	$R_2^*$	$R_3^{(-)}$
Z	34	1	-6	1/2	-3
$R_1$	0	0	2	-1/2	1
$x_3$	6	1/2	-1/2	0	-1/2
$x_4$	10	1	-1	1/2	-1

→ zulässige Ausgangslösung

6. Schritt: Optimallösung mit einfachen Simplex

2. ZT		$x_1$	$x_2$	$R_2^*$	$R_3^{(-)}$
Z	34	1	-6	1/2	-3
$R_1$	0	0	2	-1/2	1
$x_3$	6	1/2	-1/2	0	-1/2
$x_4$	10	1	-1	1/2	-1

ET		$x_1$	$R_1$	$R_2^*$	$R_3^{(-)}$
Z	34	1	3	-1	0
$x_2$	0	0	1/2	-1/4	1/2
$x_3$	6	1/2	1/4	-1/8	-1/4
$x_4$	10	1	1/2	1/4	-1/2

2) Phase 1: Entfernen der Gleichungen aus der Basis

Pivotzeile: Schlupfvariable der Gleichheitsrestriktion muß 0 sein, d.h. diese Kapazität muß voll ausgelastet werden.

$R_2 \rightarrow$  Nichtbasis

Pivotspalte: negatives Pivotelement, damit Kapazitätsspalte positiv wird.

Phase 2: Generierung einer zulässigen Ausgangslösung

Pivotzeile: Eliminieren der negativen Werte der Kapazitätsspalte, da negative Kapazitätsreste bzw. Produktmengen nicht real sind.

Pivotspalte: negatives Pivotelement, damit Kapazitätsspalte positiv wird.

Phase 3: Berechnung der Optimallösung

Pivotspalte: höchster negativer Wert in der Zielfunktionszeile, da dieser den Zielfunktionswert am meisten erhöht.

Pivotzeile: kleinster Quotient: Kapazitätsspalte/positiver Wert der Pivotspalte, da dieser als Engpaßfaktor die maximale Produktmengenerweiterung bestimmt.

3) Zielfunktionswert:  $Z = 34$

Werte der Basisvariablen:  $x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 10$

Werte der Nichtbasisvariablen:  $x_1 = R_1 = R_2^* = R_3 = 0$

4) Grenzwerte der Restriktionen (2) und (3):

R<sub>2</sub>:  $\Delta R_2^* = +1$ : Grenzwert:  $-1 \cdot (-1) \rightarrow \Delta Z = +1$

Kapazität von R<sub>2</sub>: + 1 Einheit  $\Rightarrow$  Zielfunktionsbetrag: + 1 Einheit.

Ergänzung: Zusammensetzung der Zielfunktionswertänderung:

$$\Delta Z(x_2) = -1/4 \cdot (-1) \cdot 3 = 3/4$$

$$\Delta Z(x_3) = -1/8 \cdot (-1) \cdot 4 = 1/2 \Rightarrow \Delta Z / \Delta R_2^* = 1$$

$$\Delta Z(x_4) = 1/4 \cdot (-1) \cdot 1 = -1/4$$

R<sub>3</sub>:  $\Delta R_3^{(-)} = +1$ : Grenzwert:  $0 \cdot (-1) \rightarrow \Delta Z = 0$

Kapazität von R<sub>3</sub>: + 1 Einheit  $\Rightarrow$  Zielfunktionsbetrag bleibt gleich.

Kapazitätserhöhung lohnt sich nicht.

Ergänzung: Zusammensetzung der Zielfunktionswertänderung:

$$\Delta Z(x_2) = 1/2 \cdot (-1) \cdot 3 = -3/2$$

$$\Delta Z(x_3) = -1/4 \cdot (-1) \cdot 4 = 1 \Rightarrow \Delta Z / \Delta R_3^{(-)} = 0$$

$$\Delta Z(x_4) = -1/2 \cdot (-1) \cdot 1 = 1/2$$

## Aufgabe 16

1) Eine Optimallösung muß immer auf der Gleichheitsrestriktion liegen

hier: Optimallösung ist der Schnittpunkt der beiden Gleichheitsrestriktionen, wenn dabei die Ungleichheitsrestriktionen und die Nichtnegativitätsbedingung erfüllt sind

$$R_2: \quad 1/8 \cdot x_1 + 1/3 \cdot x_2 = 2 \Rightarrow \quad x_2 = 6 - 3/8 \cdot x_1$$

$$R_4: \quad 1/3 \cdot x_1 + 1/7 \cdot x_2 = 2 \Rightarrow \quad x_2 = 14 - 7/3 \cdot x_1$$

$$\text{Gleichsetzen: } R_2 = R_4 : \quad 6 - 3/8 \cdot x_1 = 14 - 7/3 \cdot x_1$$

$$x_1 = 192/47 \approx 4,085$$

$$\rightarrow \quad x_2 = 210/47 \approx 4,468$$

Prüfung, ob Restriktionen R1, R3 und R5 erfüllt sind:

R1:  $1/6 \cdot 192/47 + 1/2 \cdot 210/47 \approx 2,915 \rightarrow \geq 2 \Rightarrow$  erfüllt

R3:  $1/5 \cdot 192/47 + 1/4 \cdot 210/47 \approx 1,934 \rightarrow \leq 2 \Rightarrow$  erfüllt

R5: NNB ist erfüllt

$\rightarrow \max Z = 2 \cdot 192/47 + 3 \cdot 210/47 = 1014/47 \approx 21,574$

2) R2 ist nicht erfüllbar, weil bei Einhaltung der NNB der Term  $(-2x_2)$  auf jeden Fall negativ sein muß. Davon eine positive Zahl abgezogen  $(-x_3)$ , muß einen negativen Wert ergeben der nicht größer als 2 sein kann, wie es R2 fordert.

$\rightarrow L = \{ \}$  (es gibt keine Lösung)

**Aufgabe 17**

1)

AT		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Z	0	-5	-10	-20	-10
$s_1^*$	-10	0	0	0	-1
$s_2^{(-)}$	-30	-1	-1	-1	0
$s_3$	110	1	2	3	4
$s_4$	100	2	1	2	1

Pivotzeile: Gleichheitsrestriktion erfüllen, indem  $s_1^*$  in die Nichtbasis gebracht wird.

Pivotspalte: Spalte mit negativem Koeffizienten auswählen, damit in der Kapazitätsspalte ein positiver Wert entsteht.

1. ZT		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1^*$
Z	100	-5	-10	-20	-10
$x_4$	10	0	0	0	-1
$s_2^{(-)}$	-30	-1	-1	-1	0
$s_3$	70	1	2	3	4
$s_4$	90	2	1	2	1

Pivotzeile: Mindestrestriktion erfüllen, indem  $s_2^{(-)}$  in die Nichtbasis gebracht wird.

Pivotspalte: Spalte mit negativem Koeffizienten in der Pivotzeile wird ausgewählt.

In diesem Fall gibt es 3 Möglichkeiten weiterzurechnen.

Ist dies der Fall, so entscheidet man sich für die Spalte, die am schnellsten zu einer zulässigen Lösung führt.

2. ZT		$x_1$	$s_2^{(-)}$	$x_3$	$s_1^*$
Z	400	5	-10	-10	-10
$x_4$	10	0	0	0	-1
$x_2$	30	1	-1	1	0
$s_3$	10	-1	2	1	4
$s_4$	60	1	1	1	1

Mit diesem Tableau wurde eine zulässige Lösung erreicht.

- 2) 2.1)  $\Delta x_4 = -5 \rightarrow \Delta s_1^* = (-5) \cdot (-1) \cdot (-1) = -5$   
 $\Delta s_1^* = -5 \rightarrow \Delta Z = (-5) \cdot (-1) \cdot (20) = 100$   $Z_{\text{neu}} = 650$   
 $\Delta x_4 = (-5) \cdot (-1) \cdot (-1) = -5$   $x_{4\text{neu}} = 5$   
 $\Delta x_1 = (-5) \cdot (-1) \cdot (-2) = -10$   $x_{1\text{neu}} = 0$   
 $\Delta x_3 = (-5) \cdot (-1) \cdot (+2) = 10$   $x_{3\text{neu}} = 30$   
 $\Delta s_4 = (-5) \cdot (-1) \cdot (+1) = 5$   $s_{4\text{neu}} = 35$
- 2.2)  $\Delta s_3 = +1 \rightarrow \Delta Z = +1 \cdot 7,5 = 7,5$   
 $\Delta x_4 = +1 \cdot 0 = 0$   
 $\Delta x_1 = +1 \cdot (-0,5) = -0,5$   
 $\Delta x_3 = +1 \cdot 0,5 = 0,5$   
 $\Delta s_4 = +1 \cdot 0 = 0$
- 2.3)  $\Delta s_2^{(-)} = +1 \rightarrow \Delta Z = +1 \cdot (-1) \cdot (+2,5) = -2,5$   
 $\Delta x_4 = +1 \cdot (-1) \cdot (0) = 0$   
 $\Delta x_1 = +1 \cdot (-1) \cdot (-1,5) = 1,5$   
 $\Delta x_3 = +1 \cdot (-1) \cdot (+0,5) = -0,5$   
 $\Delta s_4 = +1 \cdot (-1) \cdot (+2) = -2$
- 2.4)  $\Delta x_2 = +10 \rightarrow \Delta Z = 10 \cdot (-1) \cdot (+2,5) = -25$   
 $\Delta x_4 = 10 \cdot (-1) \cdot (0) = 0$   
 $\Delta x_1 = 10 \cdot (-1) \cdot (+0,5) = -5$   
 $\Delta x_3 = 10 \cdot (-1) \cdot (+0,5) = -5$   
 $\Delta s_4 = 10 \cdot (-1) \cdot (-1) = 10$

**Aufgabe 18**

- 1) Ja, da keine gesperrten Variablen in der Basis sind,  
keine Koeffizienten mit negativem Vorzeichen in der Zielfunktionszeile sind (mit Ausnahme der gesperrten Variablen  $F_1$ ),  
keine negativen Koeffizienten in der Kapazitätsspalte stehen

- 2) Berechnung des Zielfunktionswerts auf zwei verschiedene Arten:

- a) Über die Zielfunktionsbeiträge:

$$20 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 390$$

- b) Über Grenzbewertung:

$$(-20) \cdot (-3) + 100 \cdot 2 + 130 \cdot 1 = 390$$

Der Zielfunktionswert von 380 im Endtableau ist also falsch!  
390 ist korrekt.

- 3) Da die Koeffizienten des Austauschtableaus 0 sind, werden  $V_1$ ,  $V_2$  und  $F_4$  durch eine Veränderung von  $V_3$  nicht berührt.

$$4) \quad \Delta F_1 = +5 \quad \rightarrow \quad \Delta Z = 5 \cdot (-1) \cdot (-3) = 15$$

Produktionsprogramm:

$$\begin{array}{llll} \Delta V_1 & = 5 \cdot (-1) \cdot (-1) & = 5 & V_1 = 25; \quad V_2 = 5; \\ \Delta F_4 & = 5 \cdot (-1) \cdot (+1) & = -5 & V_3 = 0; \quad V_4 = 45 \\ \Delta V_2 & = 5 \cdot (-1) \cdot (+1) & = -5 & \\ \Delta V_4 & = 5 \cdot (-1) \cdot (+1) & = -5 & \end{array}$$

- 5)  $\Delta F_2$  dürfte maximal 2 GE/Einheit kosten, da jede Kapazitätseinheit  $F_2$  die Produktion von 2 Einheiten  $V_4$  ermöglicht und die Produktion 1 Einheit  $V_2$  verhindert.

$$\text{Zustandekommen des Grenzwerts: } -1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 2$$